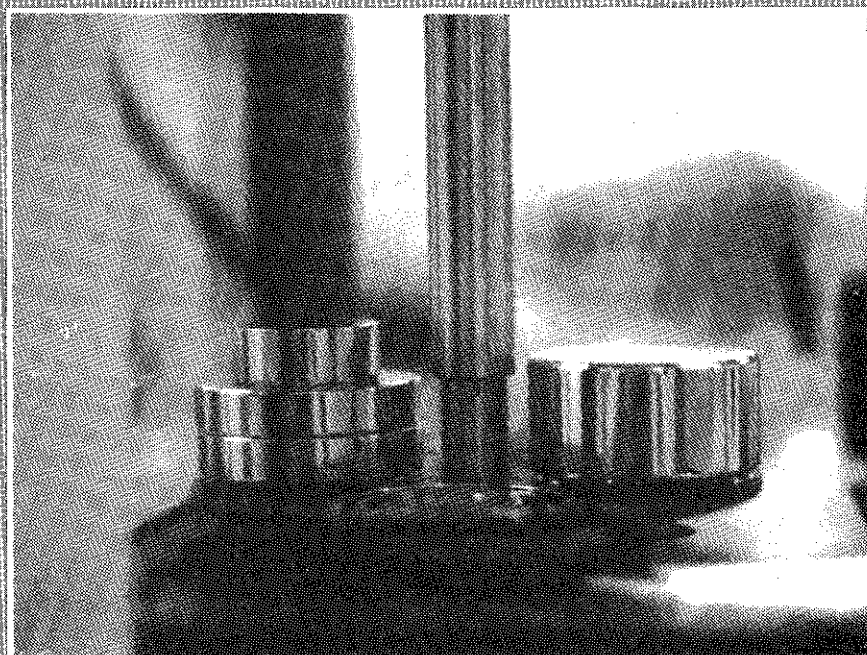


Leslie Pendrill

NEDDELNING AV KILOGRAMMET



MÅTT OCH VIKT

SP RAPPORT

1989:22



Leslie Pendrill

NEDDELNING AV
KILOGRAMMET

SP RAPPORT 1989:22
Mått och vikt
Borås 1989

CALIBRATION OF SUBMULTIPLES OF THE KILOGRAM

ABSTRACT:

Within the last ten years, new schemes for the calibration of weights which are submultiples of one kilogram have been devised. Using a combination of matrix algebra and error analysis, it has been possible to find optimal least-squares solutions of the linear calibration system relating individual mass values to observed mass differences. The optimal solution for a particular set of submultiple weights is the one with the minimum variance and with zero covariance, and is obtained by constructing an orthogonal design matrix. Other subdivision schemes have solutions having both greater variance as well as non-zero covariance, even in the case where the weighings are statistically independent of each other. This report summarises the analysis of kilogram subdivision, gives some recent results of automatic weighing of disc weights in the range 100g to 1000g, and includes a discussion of the influence of air buoyancy on the results.

Keywords: WEIGHT CALIBRATION, SUBDIVISION OF KILOGRAM, WEIGHING SCHEMES, LEAST-SQUARES, MATRIX, ERROR ANALYSIS, ORTHOGONAL DESIGN MATRIX

STATENS PROVNINGSANSTALT
SP-RAPPORT 1989:22

SWEDISH NATIONAL TESTING INSTITUTE
SP REPORT 1989:22
ISBN 91-7848-172-4
ISSN 0284-5172

Postal address:
P O Box 857, S- 501 15 BORÅS
SWEDEN
Telephone Int + 46 33 165000
Telex 36252 Testing S
Telefax Int + 46 33 135502

| INNEHÅLLSFÖRTECKNING | SIDA |
|--|------|
| ABSTRACT | 2 |
| SAMMANFATTNING | 5 |
| 1. INLEDNING | 6 |
| 2. TEORI | 7 |
| <u>2.1 Kalibrerings ekvationer</u> | 7 |
| <u>2.2 Lösningen av ekvationen.</u> | 8 |
| <u>2.3 Osäkerheterna i neddelningen.</u> | 8 |
| <u>2.4 Det optimala vägningsschemat</u> | 9 |
| 3. EXEMPEL | 10 |
| <u>3.1 Viktsatsen 10, 5, 5', 2, 2', 1, 1'</u> | 10 |
| 3.1.1 Thomas schema | 10 |
| 3.1.1.1 Schema (I) | 10 |
| 3.1.1.2 Schema (II) | 11 |
| 3.1.2 Det optimala neddelningsschemat för viktsatsen $5(r), 2, 2', 1, 1'$. | 14 |
| <u>3.2 Automatisk vägning av skivvikter</u> | 18 |
| 4. DEN ALLMÄNNA OPTIMALA LÖSNINGEN OCH OSÄKERHETERNA | 21 |
| 5. LUFTENS UPPTRYCK | 22 |
| <u>5.1 Formalismen</u> | 22 |
| <u>5.2 Exempel.</u> | 24 |
| 5.2.1 Thomas schema | 24 |
| 5.2.2 Det optimala neddelningsschemat för viktsatsen $5(r), 2, 2', 1, 1'$. | 26 |
| 6. AVSLUTNING | 27 |
| REFERENSER | 28 |

Bilaga 1. BASIC program för matrisberäkning

Bilaga 2. FORTRAN program för beräkning av A:B:A vägningar

Bilaga 3. FORTRAN program för beräkning av neddelningens
lösning.

NEDDELNING AV KILOGRAMMET.

SAMMANFATTNING

Under de senaste tio åren har olika scheman för kalibrering av vikter som är delar av ett kilogram tagits fram. Med användning av matrisalgebra och felanalys har det varit möjligt att finna en optimal lösning till det linjära ekvationssystem som relaterar enskilda viktvärden till de uppmätta viktskillnader. Den optimala lösningen bygga på minsta kvadratmetoden och är för en viss viktsats den med den minsta variansen och är utan kovarians. Lösningen erhålles genom en ortogonal designmatris. Andra neddelningsscheman har lösningar med större varianser samt kovarianser, även i de fall där vägningarna är statistiskt oberoende av varandra. I rapporten ges en sammanfattning av kilogrammets neddelningen, några resultat av automatisk vägning av skivvikter i området 100g till 1000g, samt en diskussion av luftuptryckets inverkan på resultatet.

1. INLEDNING

Sveriges huvudnormaler för ett kilogram, en Pt-Ir prototyp, K 40, och några av Statens provningsanstalts kilogram i stål och förgylld mässing, har komparerats, både vid den internationella byrån för mått och vikt (BIPM) i Frankrike (i 1984) och vid riksmätplatsen för massa i Borås (1985-1987) /Pendrill and Källgren 1988/.

För att överföra den internationella spårbarheten till viktnormaler av andra storlekar, är det nödvändigt att utföra ytterligare ett antal komparationer mellan olika viktsatser som är uppbyggda kring bråkdelar och multiplar av ett kilogram. Vid varje komparation förlorar man noggrannhet. I denna rapport diskuteras valet av ett optimalt komparationsschema för neddelningen av kilogrammet, dvs schemat som har den minsta osäkerheten förknippat med sig.

Problemet att konstruera ett lämpligt schema för komparationen av viktsatser, uppdelade i dekad av serie som, t.ex., 10, 5, 2, 2', och 1, är minst ett hundra år gammalt. Lösningar med minsta-kvadrat metoden för olika viktsatser härleddes kring sekelskiftet /Marek 1884, Hayford 1892, Benoit 1907/. Sedan dess har många sådana lösningar prövats /t.ex., Cameron et al 1977/ och med hjälp av datorer som underlättar matrisinversion har det blivit möjligt att utveckla mer förfinade scheman.

Under de senaste tio åren har nya optimala schema för kalibreringen av vikter som är delar av ett kilogram tagits fram /Prowse and Andersson 1974/. Med användning av matrisalgebra och felanalys har det varit möjligt att finna optimala lösningar till det linjära ekvationssystemet som relaterar enskilda viktvärden till de uppmätta viktskillnaderna /Grabe 1978/. Den optimala lösningen för en viss viktsats är den med den minsta variansen och är utan kovarians. Den erhålles genom konstruktionen av en ortogonal designmatris /Zuker et al 1980, Riety 1985, Chapman 1987/. Andra neddelningsscheman /e.g. Thomas 1989/ har lösningar med större varianser samt kovarianser, även i de fall där vägningar är statistiskt oberoende av varandra. I denna rapport analyseras kilogrammets neddelningen, resultatet av automatisk vägning av skivvikter i området 100g till 1000g, samt en diskussion av luftuppträckets inverkan på resultatet.

2. TEORI

2.1 Kalibreringens ekvationer

En vikts massa, m , kan uttryckas som summan av sitt nominella värdet, M , plus en korrektion, c :

$$m = M + c \quad (2.1)$$

En neddelning består av n vägningar, v_1, v_2, \dots, v_n av N vikter med målet att bestämma massorna m_1, m_2, \dots, m_N med hjälp av en referensvikt för varje dekad /Benoit 1907/. Referensvikten är en vikt, r , i dekaderna, som redan är kalibrerad.

En vägning (den i^o) ger ett värde, d_i , -- s.k. deflexion --, på skillnaden i massa mellan två grupper av vikter av nominellt samma totala massa :

$$\sum_j a_{ij} m_j - \sum_k a_{ik} m_k = d_i \quad (2.2)$$

där a_{ij} är lika med ett (1) om vikten j är närvarande och är noll (0) om vikten saknas. Ekv (2.2) kallas villkorsekvation. Ekvationen där $a_{ir} = 1$ kallas definitionsekvationen.

Substitution av (2.1) i (2.2) leder till uttrycket:

$$\sum_j a_{ij} c_j - \sum_k a_{ik} c_k = d_i \quad (2.3)$$

i att vågen är nominellt i balans.

Korrektionen, c_r , på referensvikten är redan känd, så att (2.3) kan skrivas:

$$\sum_j a_{ij} c_j - \sum_k a_{ik} c_k = d_i - a_{ir} c_r \quad (2.4)$$

Antalet vägningar, n , kan väljas; det minsta antalet är N och det största antalet är $N(N-1)/2$ (= alla möjliga vikt-kombinationer). I matrisform blir ekvationssystemet för n vägningar:

$$A.C = D \quad (2.5)$$

där $A = \{a_{ij}\}$ är en matris med dimensionen $n \times N$, den s.k. designmatrisen;

$C = \{c_j\}$ är en kolumnmatris med dimensionen $N \times 1$ -- korrektionsmatrisen;

och $D = \{d_i - a_{ir} c_r\}$ är en kolumnmatris med dimensionen $n \times 1$ -- deflektionsmatrisen.

2.2 Lösning av ekvationerna.

En exakt lösning, $C = A^{-1} \cdot D$, av ekv. (2.5) går inte att få i de flesta fall pga mätfel. Flera deflexioner än okända viktvärden behövs i allmänhet bestämmas, och inversen av en icke-kvadratisk designmatris A kan ej beräknas.

Den bästa anpassningen av mätvärdena till de linjära ekvationer som väntas relaterar viktvärdena, erhålles genom minsta-kvadrat metoden. Korrektionsmatrisen blir:

$$C' = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot D \quad (2.6)$$

där A^T är transponatet av designmatrisen, och $(A^T \cdot A)^{-1}$ är inversen av den ickesingulära matrisen $(A^T \cdot A)$.

2.3 Osäkerheterna i neddelningen.

Osäkerheterna i vägningarna uttryckes som en matris $V = \{\sigma_{ij}\}$, där de diagonalla matriselementen är varianserna och de icke-diagonalla elementen, kovarianserna:

$$\begin{aligned} V(C) &= \langle (C' - C) \cdot (C' - C)^T \rangle \quad (2.7) \\ &= (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot V(D) \cdot A \cdot (A^T \cdot A)^{-1} \end{aligned}$$

Ekvationen (2.7) förenklas /Riety 1985/ i de fall där alla vägningar görs på en enda väg och om man antar att alla vägningar är statistiskt oberoende av varandra och med en gemensam varians σ^2 . I detta fall gäller

$V(D) = \sigma^2 I$, där I är enhetsmatrisen, och

$$V(C) = \sigma^2 (A^T A)^{-1} \quad (2.8)$$

2.4 Det optimala vägningsschemat

Det visar sig att det neddelningssystem, som har en designmatrix med ortogonala kolumner, är det som leder till de minsta värdena på varianserna för bestämda viktvärden /Prowse and Andersson 1974/. Med andra designmatriser måste hänsyn tas till korrelationer i lösningen, även om observationerna kan antas vara statistiskt oberoende (se sektion 2.3). Kolumnerna A_1 av designmatrisen $A (= [A_1 A_2 \dots A_N])$ betraktas som ortogonala om

$$A_i^T A_j = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.9)$$

Matrisen $(A^T \cdot A)$ är då diagonal, och beräkningen av varianserna, ekvation (2.8), förenklas.

En ortogonal designmatrix kan erhållas på följande sätt /Grabe 1978, Zuker et al 1980, Riety 1985, Chapman 1987/:

(a) Villkorsekvationerna (2.2) kan användas mer än en gång, eller utelämnas /Grabe 1978/. Man definierar en uppsättning frekvenser, f_i , ($1 < i < k$) där k är antalet villkorsekvationer (2.2); frekvenserna är positiva heltal eller noll och är lika med antalet gånger varje ekvation förekommer i designmatrisen;

(b) Rader i designmatrisen A som skiljer sig enbart med en konstant faktor betraktas som en rad;

(c) Referensvikten (sektion 2.1) måste vara den tyngsta vikten i dekadern;

(d) Om det finns ett par rader av designmatrisen vars summa eller skillnad är lika med ett annat par av rader, förutom en konstant faktor, då betraktas paren som ekvivalenta /Chapman 1987/.

En ortogonal designmatrix erhålles enligt dessa förutsättningar genom ekvationen:

$$0 = \sum_i a_{ij} a_{ih} f_i \quad \text{där } j > h \quad (2.10)$$

Den optimala variansen är

$$V_{opt}(j) = \sigma^2 / N_j \quad (2.11)$$

där N_j är antalet vägningar där vikten med massa m_j ingår i vägningen (dvs där $a_{ij} = 1$) /Prowse & Andersson 1974/.

3. EXEMPEL

3.1 Viktsatsen 10, 5, 5', 2, 2', 1, 1'

Två viktsatser som har samma antal vikter med samma nominella viktvärden, uppdelade i dekad enligt 10, 5, 2, 1, vägs mot varandra. De matrisberäkningar nedan utförs med ett BASIC program på SP:s VAX dator. Programmet återfinns bilaga /1/.

3.1.1 Thomas schema /Thomas 1989/

Två vägningscheman genomförs:

$$\begin{array}{l} \text{Schema (I): } 10 \leftrightarrow 5 + 5'; d_1 \\ \phantom{\text{Schema (I): }} 5 \leftrightarrow 5' ; d_2 \end{array} \quad M_r = 10$$

$$\begin{array}{l} \text{Schema (II): } 5 \leftrightarrow 2 + 2' + 1; d_3 \\ \phantom{\text{Schema (II): }} 2 \leftrightarrow 2' ; d_4 \\ \phantom{\text{Schema (II): }} 2 \leftrightarrow 1 + 1' ; d_5 \\ \phantom{\text{Schema (II): }} 1 \leftrightarrow 1' ; d_6 \end{array} \quad M_r = 5$$

3.1.1.1 Schema (I)

För schema (I) är designmatrisen:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5' \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A_I, \quad \text{Schema (I)}$$

För schema (I) är detta det enda möjliga och därmed det optimala. Transponatet av A_I är:

$$A_I^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{så att } A_I^T \cdot A_I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A_I^T \cdot A_I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Lösningen enligt minsta-kvadratmetoden för viktkorrectionerna ges av (2.6):

$C' = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot D$, som är

$$\begin{pmatrix} c(5) \\ c(5') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 - c_r(10) \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Dvs

$$c(5) = \frac{1}{2} c_r(10) - \frac{1}{2} d_1 + \frac{1}{2} d_2$$

$$c(5') = \frac{1}{2} c_r(10) - \frac{1}{2} d_1 - \frac{1}{2} d_2$$

(3.1)

Under antagande av ekv. (2.8) får man variansen för varje vägning $V(5) = V(5') = 0,5 \sigma^2$, (se 2.4).

3.1.1.2 Schema (II).

För schema (II):

Designmatrisen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2' & 1 & 1' \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A_{II}, \text{ Schema (II)}$$

$$A_{II}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{II}^T \cdot A_{II} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversen av denna matris beräknas till:

$$(A_{II}^T \cdot A_{II})^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,6 & -0,2 & 0 \\ 0 & -0,2 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Minstakvadratmetodens-lösning för viktkorrectionerna ges av uttrycket (2.6):

$C' = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot D$, som är:

$$\begin{pmatrix} c(2) \\ c(2') \\ c(1) \\ c(1') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,4 & 0,4 & 0,2 & -0,2 \\ -0,4 & -0,6 & 0,2 & -0,2 \\ -0,2 & 0,2 & -0,4 & 0,4 \\ -0,2 & 0,2 & -0,4 & -0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_3 - c_r(5) \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Dvs, till exempel /Thomas 1989/

$$c(2) = \frac{2}{5} c_r(5) - \frac{2}{5} d_3 + \frac{2}{5} d_4 + \frac{1}{5} d_5 - \frac{1}{5} d_6$$

Under antagande av ekvation (2.8) blir de optimala varianserna (från ekv 2.11) (som erhålles enbart med en ortogonal designmatris):

$$V_{opt}(2) = V_{opt}(1) = 0,333 \sigma^2$$

$$V_{opt}(2') = V_{opt}(1') = 0,5 \sigma^2$$

För designmatrisen till schema (II), är emellertid osäkerheterna i viktkorrectionerna (från matrisekvationen (2.8)):

$$V(C) = \sigma^2 \cdot \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,6 & -0,2 & 0 \\ 0 & -0,2 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0,6 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

De diagonala element av variansmatrisen ger en uppskattning av varianserna i viktkorrectionerna:

$$V(2) = V(1) = 0,4 \sigma^2$$

$$V(2') = V(1') = 0,6 \sigma^2$$

som är något större än de optimala varianserna angivna ovan.

Dessutom framgår av variansmatrisen (3.3) att de olika viktkorrectionerna inte är statistiskt oberoende. Följande kovarianser finns mellan lösningarna, trots att de experimentella observationerna har antagits vara utan korrelation:

$$V(2,1') = 0,2 \sigma^2; \quad V(2',1) = -0,2 \sigma^2$$

$$V(1',2) = -0,2 \sigma^2; \quad V(1,2) = 0,2 \sigma^2$$

Liknande icke-diagonala element av variansmatrisen har diskuterats tidigare /Prowse and Andersson 1974/ /Carré and Davis 1985/, som konstaterar att i långa vägningsserie är det möjligt att anta att vikterna läggs lika många gånger på samma vågskål som på olika skålar. Resultatet blir att kovarianstermen sannolikt adderas och subtraheras lika många gånger, så att i genomsnitt blir medelvärdet noll. I bästa fall blir varianserna emellertid enbart semi-kvantativt uppskattade.

Problemet kan helt elimineras om man i stället väljer att utföra ett antal extra vägningsskombinationer för att få en ortogonal designmatris.

3.1.2 Det optimala neddelningsschemat för viktsatsen 5(r), 2, 2', 1, 1'.

Alla möjliga vägningar mellan vikterna 5(r), 2, 2', 1, 1' är:

$$\begin{array}{ll}
 5 \leftrightarrow 2 + 2' + 1 & \text{(i)} \\
 5 \leftrightarrow 2 + 2' + 1' & \text{(ii)} \\
 2 \leftrightarrow 1 + 1' & \text{(iii)} \\
 2' \leftrightarrow 1 + 1' & \text{(iv)} \\
 2 \leftrightarrow 2' & \text{(v)} \\
 1 \leftrightarrow 1' & \text{(vi)} \\
 2 + 1 \leftrightarrow 2' + 1' & \text{(vii)} \\
 2 + 1' \leftrightarrow 2' + 1 & \text{(viii)}
 \end{array}$$

För att ta fram den optimala lösningen, söker vi en ortogonal designmatrix, som härleds enligt sektion 2.4. Regel (a) har redan tillämpats ovan genom att eliminera de vägningar där samma viktkombinationer vägs på motsatta vågskålan, dvs de ekvationer som skiljer sig med olika tecken. Regel (d) kan tillämpas på ekvationsparen iii/iv och vii/viii, där summan/skillnaden av ena paret är lika med det andra paret, så att bara det ena paret behövs tas med. Vi väljer att eliminera paret vii/viii, pga att paret v/vi redan är med i Thomas' schema /Thomas 1989/.

Från ekv. (2.10), där varje villkorsekvation i designmatrisen är förknippade med en frekvens, f , får vi:

$$\begin{array}{ll}
 0 = f_i + f_{ii} - f_v, & \text{för } j=1, h=2 \\
 0 = f_i - f_{iii}, & \text{för } j=1, h=3 \\
 0 = f_{ii} - f_{iii}, & \text{för } j=1, h=4 \\
 0 = f_i - f_{iv}, & \text{för } j=2, h=3 \\
 0 = f_{ii} - f_{iv}, & \text{för } j=2, h=4 \\
 0 = f_{iii} + f_{iv} - f_{vi}, & \text{för } j=3, h=4
 \end{array}$$

Det är lätt att visa att:

$$f_i = f_{ii} = f_{iii} = f_{iv} \text{ och att } f_v = f_{vi} = 2f_i.$$

Om vi väljer $f_i = 1$, då behövs det 8 viktjämförelser för optimalt neddelningsschema för viktsatsen.

Designmatrisen blir

$$A_{\text{Iropt}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Transponatet: $(A_{\text{Iropt}})^T =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= A^T \cdot A$$

och inversen

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$= (A^T \cdot A)^{-1}$$

(3.4)

Lösning är $C' = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot D$, där

$$C' = \begin{pmatrix} c(2) \\ c(2') \\ c(1) \\ c(1') \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} d_3 - c_r(5) \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 - c_r(5) \\ d_8 \\ d_9 \\ d_{10} \end{pmatrix}$$

och $(A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T =$

$$\begin{pmatrix} -0,2 & 0,2 & 0,2 & 0 & -0,2 & 0,2 & 0 & 0 \\ -0,2 & -0,2 & 0 & 0 & -0,2 & -0,2 & 0,2 & 0 \\ -0,2 & 0 & -0,2 & 0,2 & 0 & 0 & -0,2 & 0,2 \\ 0 & 0 & -0,2 & -0,2 & -0,2 & 0 & -0,2 & -0,2 \end{pmatrix}$$

eller

$$c(2) = \frac{2}{5}c_r(5) - \frac{1}{5}d_3 + \frac{1}{5}d_4 + \frac{1}{5}d_5 - \frac{1}{5}d_7 + \frac{1}{5}d_8$$

$$c(2') = \frac{2}{5}c_r(5) - \frac{1}{5}d_3 - \frac{1}{5}d_4 - \frac{1}{5}d_7 - \frac{1}{5}d_8 + \frac{1}{5}d_9$$

(3.5)

$$c(1) = \frac{1}{5}c_r(5) - \frac{1}{5}d_3 - \frac{1}{5}d_5 + \frac{1}{5}d_6 - \frac{1}{5}d_9 + \frac{1}{5}d_{10}$$

$$c(1') = \frac{1}{5}c_r(5) - \frac{1}{5}d_5 - \frac{1}{5}d_6 - \frac{1}{5}d_7 - \frac{1}{5}d_9 - \frac{1}{5}d_{10}$$

Deflexionerna d_3 , d_4 , d_5 och d_6 är de viktkombinationer som föreslås i Thomas' schema /Thomas 1989/. För att erhålla den optimala lösningen krävs ytterligare följande vägningar:

$$d_7 : 5 \leftrightarrow 2 + 2' + 1'$$

$$d_9 : 2' \leftrightarrow 1 + 1'$$

Kombinationerna d_8 och d_{10} är upprepningar av kombinationerna d_4 och d_6 . Vid bestämning av den optimala lösningen tas extra hänsyn till dessa kombinationer.

Under antagandet att variansen i varje vägning är lika med σ^2 utan kovarians, ger ekv. (2.8) variansen i lösningen (3.5). Från matrisen $(A^T A)^{-1}$ i ekv. (3.4) ser man att

$$V(2) = V(2') = V(1) = V(1') = \frac{\sigma^2}{5}$$

som är den optimala variansen där varje vikt deltar 5 gånger i neddelningen. Denna varians är minst en faktor 2 mindre än Thomas' lösningen (sektion 3.1.1.2), och dessutom finns det inga korrelationer i resultatet.

I sammanfattning blir det optimala vägningsschemat:

$$d_1 : 10 \leftrightarrow 5 + 5'$$

$$d_2 : 5 \leftrightarrow 5'$$

$$d_3 : 5 \leftrightarrow 2 + 2' + 1$$

$$d_4 : 2 \leftrightarrow 2'$$

$$d_5 : 2 \leftrightarrow 1 + 1'$$

$$d_6 : 1 \leftrightarrow 1'$$

$$d_7 : 5 \leftrightarrow 2 + 2' + 1'$$

$$d_8 : 2 \leftrightarrow 2'$$

$$d_9 : 2' \leftrightarrow 1 + 1'$$

$$d_{10} : 1 \leftrightarrow 1'$$

3.2 Automatisk vägning av skivvikter

Under januari och februari 1989 kalibrerades två viktsatser med viktvärdens om vardera 500 g, 200 g och 100 g. Referensvikten var en enkilogramsvikt som komparerats mot riksnormalen. Den tidigare beskrivna metoden för optimal neddelning av kilogrammet tillämpades på de två parallella viktsatserna.

Referensvikten är av rost-fritt stål, densiteten 7887,62 kg/m³, med beteckning "MJV2", med massa 1kg + 505(16) µg /Pendrill och Källgren 1988/. Båda viktsatserna består av ett lika antal skivor, tillverkade 1983 av Gragerts Våg & Viktservice AB ur en och samma stång av den rostfriastål-legeringen URANUS B6. Skivvikternas densitet är då densamma för alla vikter, och är bestämd genom hydrostatisk vägning (830405) av två provskivor till 8019,7 ± 0,2 kg/m³.

Samtliga vägningar utfördes på en och samma våg, en ny elektronisk våg med beteckningen Sartorius C1000S, upplösning 2µg. Vågen är utrustad med datorstyrd automatik som sköter vägningen av två vikter, A och B, mot varandra, efter rutinen A₁:B₂:A₃:B₄:A₅:B₆ Skillnaden i avlästa viktvärde beräknas sedan som medelvärdet av skillnader:

$$[(A_1 + A_3)/2 - B_2]; [A_5 - (B_4 + B_6)/2]; \dots \quad (3.6)$$

Ett beräkningsprogram, ABA.FOR, skrivit i FORTRAN 77 för denna utvärdering har körts på SP:s VAX dator. Programmet finns i Bilaga 2.

Tio olika vägningskombinationer utfördes enligt det optimala schemat beskrivit i sektion 3.1.2, med följande resultat:

$$d_1 = \text{MJV2} - ([500\text{g}] + [500\text{g}]') = - 4615,17 (0,87) \mu\text{g}$$

Siffrorna i parentes är den beräknade standardavvikelsen för medelvärdet på vägningsserien av vanligen 6 skillnader av typ (3.6), dvs 18 avläsningar.

Resultatet korrigerad för luftens upptryck:

$$d_1 = - 2137,73 (0,92) \mu\text{g}$$

$$d_2 = [500g] - [500g]' = + 213,00 (0,70) \mu g$$

Det optimala lösningen blir (ekv 3.1)

$$c(500g) = \frac{1}{2} c_r(1000g) - \frac{1}{2} d_1 + \frac{1}{2} d_2 = + 1427,87 (8,02) \mu g$$

$$c(500'g) = \frac{1}{2} c_r(1000g) - \frac{1}{2} d_1 - \frac{1}{2} d_2 = + 1214,87 (8,02) \mu g$$

Skivvikterna 200g och 100g staplades sedan på varandra i nästa vägning:

$$d_3 = [500g] - ([200g] + [200g]' + [100g])$$

$$= - 1619,17 (0,54) \mu g$$

Vidare

$$d_4 = [200g] - [200g]' = - 449,67 (0,56) \mu g$$

$$d_5 = [200g] - ([100g] + [100g]') = - 2507,83 (0,48) \mu g$$

$$d_6 = [100g] - [100g]' = + 79,50 (0,36) \mu g$$

Så långt finns tillräckligt underlag för att beräkna viktvärdena enligt Thomas' schemat. Från ekv. (3.2):

$$c(200g) = \frac{2}{5} c_r(500g) - \frac{2}{5} d_3 + \frac{2}{5} d_4 + \frac{1}{5} d_5 - \frac{1}{5} d_6$$

$$= + 521,48 (3,23) \mu g$$

$$c(200'g) = \frac{2}{5} c_r(500g) - \frac{2}{5} d_3 - \frac{3}{5} d_4 + \frac{1}{5} d_5 - \frac{1}{5} d_6$$

$$= + 971,15 (3,24) \mu g$$

(3.6)

$$c(100g) = \frac{1}{5} c_r(500g) - \frac{1}{5} d_3 + \frac{1}{5} d_4 - \frac{2}{5} d_5 + \frac{2}{5} d_6$$

$$= + 1554,41 (1,63) \mu g$$

$$c(100'g) = \frac{2}{5} c_r(500g) - \frac{1}{5} d_3 + \frac{1}{5} d_4 - \frac{2}{5} d_5 - \frac{3}{5} d_6$$

$$= + 1474,91 (1,64) \mu g$$

De extra viktkombinationer som skall vägas för att erhålla en optimal lösning är de följande:

$$\begin{aligned}
 d_7 &= [500g] - ([200g] + [200g]' + [100g]') \\
 &= -1530,83 \text{ (0,70) } \mu g \\
 d_8 &= [200g] - [200g]' &= -446,67 \text{ (0,21) } \mu g \\
 d_9 &= [200g]' - ([100g] + [100g]') &= -2057,50 \text{ (0,62) } \mu g \\
 d_{10} &= [100g] - [100g]' &= +79,43 \text{ (0,23) } \mu g
 \end{aligned}$$

Den optimal lösningen blir, enligt ekv. (3.5):

$$\begin{aligned}
 c(200) &= \frac{2c_r}{5}(500) - \frac{1d_3}{5} + \frac{1d_4}{5} + \frac{1d_5}{5} - \frac{1d_7}{5} + \frac{1d_8}{5} \\
 &= +520,31 \text{ (3,22) } \mu g
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c(200') &= \frac{2c_r}{5}(500) - \frac{1d_3}{5} - \frac{1d_4}{5} - \frac{1d_7}{5} - \frac{1d_8}{5} + \frac{1d_9}{5} \\
 &= +968,91 \text{ (3,22) } \mu g
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c(100) &= \frac{1c_r}{5}(500) - \frac{1d_3}{5} - \frac{1d_5}{5} + \frac{1d_6}{5} - \frac{1d_9}{5} + \frac{1d_{10}}{5} \\
 &= +1554,26 \text{ (1,62) } \mu g
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c(100') &= \frac{1c_r}{5}(500) - \frac{1d_5}{5} - \frac{1d_6}{5} - \frac{1d_7}{5} - \frac{1d_9}{5} - \frac{1d_{10}}{5} \\
 &= +1473,02 \text{ (1,62) } \mu g
 \end{aligned}$$

Beräkningsprogrammet, OPTIMAL.FOR, skrivit i FORTRAN 77 på SP:s VAX dator, återges i bilaga 3.

Standardavvikelsen i varje viktkorrektion domineras av osäkerheten i kalibreringen av referenskilogrammet MJV2. För att jämföra den optimala och Thomas lösninga ges det typ-A felet förknippat med varje neddelning, för resp. vikt

| | 200g, | 200'g, | 100g | 100'g: |
|----------|----------------|----------------|----------------|---|
| Optimal: | 0,33 μg ; | 0,34 μg ; | 0,24 μg ; | 0,26 μg |
| Thomas: | 0,41 μg ; | 0,48 μg ; | 0,31 μg ; | 0,35 μg (utan hänsyn till korrelation). |

4. DEN ALLMÄNNA OPTIMALA LÖSNINGEN OCH OSÄKERHETERNA

Granskning av lösningar C' , ekv. (3.1) och 3.5) av de optimala neddelningsscheman (dvs med ortogonala designmatriser) leder oss till påståendet att formen på lösningen blir i allmänhet:

$$c_j = \alpha_j c_r + \frac{1}{n_j} S_j \quad (4.1)$$

där $\alpha_j = \frac{M_j}{M_r}$, är kvoten av summan, M_j , av de okända vikternas

nominella massor, och M_r , den nominella massan av referensvikten;

och där n_j är antalet deflexioner, d_i , i summan

$$S_j = \sum_i a_{ij} d_i \quad (4.2)$$

Massan av vikten j blir således (från ekv. 2.1)

$$m_j = \alpha_j m_r + \frac{1}{n_j} S_j \quad (4.3)$$

Variansen är

$$\sigma^2(c_j) = \alpha_j^2 \sigma^2(c_r) + \frac{1}{n_j} \sigma^2(d) \quad (4.4)$$

i de fall där variansen i varje deflexion är lika med σ^2 .

Mer allmänt

$$\sigma^2(c_j) = \alpha_j^2 \sigma^2(c_r) + V_{jj}(C') \quad (4.5)$$

där $V_{jj}(C')$ är det i^o diagonala elementet av lösningens variansmatris, under förutsättningen att denna är diagonal.

Variansen i varje deflexion d_i är en funktion av både osäkerheten i avläsningen av vågen (avlästa skalvärdet ΔI) och variansen förknippad med bestämningen av vågens känslighet (känslighetsvikten m_s).

$$d_i = \frac{\Delta I_d}{\Delta I_s} m_s$$

5. LUFTENS UPTRYCK

5.1 Formalism

Skillnaden i massa berorende på luftens upptryck mellan den verkliga massan och det avlästa värdet på vågen är den s k apparenta massskillnaden. Skillnaden beror på att de vägda massorna undantränger olika stora volymer luft.

Den apparenta massan, m , av en vikt med volym V och massa m_0 är

$$m = m_0 - \rho_a V = m_0 \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_m}\right) = K_m m_0 \quad (5.1)$$

där ρ_a är luftens densitet;

$\rho_m = \frac{m_0}{V}$, är viktens densitet; och

$K_m = 1 - \frac{\rho_a}{\rho_m}$, kallas för "upptrycket" på vikten.

En serie vägningar (den i°) ger en deflexion, d_i , skillnaden i massa mellan två grupper av vikter med nominellt samma totala massa (från ekv. 2.2) :

$$\sum_j a_{ij} K_j m_j - \sum_k a_{ik} K_k m_k = d_i \quad (5.2)$$

där a_{ij} är lika med ett (1) om vikten j är närvarande och är noll (0) om vikten saknas.

Ekvationen kan skrivas om m h a ekv (2.1) så att alla kända termer finns på ekvationens högerled:

$$\sum_j a_{ij} K_j c_j - \sum_k a_{ik} K_k c_k = d_i - a_{ir} K_r c_r - a_{ir} K_r M_r - \sum_j a_{ij} K_j M_j + \sum_k a_{ik} K_k M_k \quad (5.3)$$

Substitution av (4.1) i (4.3) leder till uttrycket:

$$\sum_j a_{ij} K_j c_j - \sum_k a_{ik} K_k c_k = d_i - a_{ir} K_r c_r - a_{ir} \frac{\rho_a}{\rho_r} M_r - \sum_j a_{ij} \frac{\rho_a}{\rho_j} M_j + \sum_k a_{ik} \frac{\rho_a}{\rho_k} M_k \quad (5.4)$$

Vågen är nominellt i balans.

I matrisform:

$$AC = D \quad (5.5)$$

där $A = \{a_{ij}\}$ är en matris av dimension $n \times N$, designmatrisen;

$C = \{K_j c_j\}$ är en kolumnmatris av dimension $N \times 1$ -- korrektionsmatrisen;

och $D = \{d_i - \Delta_i - a_{ir} c_r\}$ är en kolumnmatris av dimension $n \times 1$ -- deflektionsmatrisen. Här

$$\Delta_i = a_{ir} \frac{\rho_a}{\rho_r} M_r + \sum_j a_{ij} \frac{\rho_a}{\rho_j} M_j - \sum_k a_{ik} \frac{\rho_a}{\rho_k} M_k \quad (5.6)$$

är den nominella korrektionen för luftuptrycket till den i^o villkorsekvation.

Under förutsättningen att designmatrisen A är ortogonal (sektion 2.4) fås den optimala lösningen av ekv. (5.5) i likhet med (4.1)

$$K_j c_j = \alpha_j K_r c_r + \frac{1}{n_j} S_j \quad (5.7)$$

där $\alpha_j = \frac{M_j}{M_r}$ och summan

$$S_j = \sum_i a_{ij} (d_i - \Delta_i) \quad (5.8)$$

där Δ_i ges av ekv. (5.6)

Även vågens känslighet bör korrigeras för inverkan av luftens uptryck:

$$d_i = \frac{\Delta I_d}{\Delta I_s} K_s m_s \quad (5.9)$$

5.2 Exempel.

Tabell 5.1 visar typiska värden på olika materials densitet samt luftens upptryck för några vanliga viktmaterial.

Tabell 5.1 Densitet och luftens upptryck för olika viktmaterial (efter Chapman).

| Material | Densitet, ρ (kg.m^{-3}) | K | $1 - K = \frac{\rho_a}{\rho}$ |
|----------|--|----------|-------------------------------|
| Luft | 1,2 | 0 | 1 |
| Stål | 7 800 | 0,999846 | $1,5 \times 10^{-4}$ |
| Mässing | 8 400 | 0,999857 | $1,4 \times 10^{-4}$ |
| Tantal | 16 600 | 0,999927 | $7,2 \times 10^{-5}$ |
| Pt-Ir | 21 500 | 0,999944 | $5,6 \times 10^{-5}$ |

I följande exempel antar vi att de två viktsatser som kalibreras vid neddelning av kilogrammet är uppdelade i dekad enligt beskrivningen i sektion (3.1), men att de två viktsatserna är av olika material: viktsatsen 10,5,2,1 med densitet ρ och viktsatsen 10',5',2',1' med densitet ρ' , med resp. upptryck K och K'.

5.2.1 Thomas schema

Lösningen (3.1) skrivs om m h a ekv. (4.7)

$$Kc(5) = \frac{1}{2} Kc_r(10) - \frac{1}{2} (d_1 - \Delta_1) + \frac{1}{2} (d_2 - \Delta_2) \quad (5.10)$$

$$K'c(5') = \frac{1}{2} Kc_r(10) - \frac{1}{2} (d_1 - \Delta_1) - \frac{1}{2} (d_2 - \Delta_2)$$

där från ekv. (4.6)

$$\Delta_1 = \frac{\rho_a}{\rho} \cdot 10 - \frac{\rho_a}{\rho} \cdot 5 - \frac{\rho_a}{\rho'} \cdot 5 = 5 \cdot \left(\frac{\rho_a}{\rho} - \frac{\rho_a}{\rho'} \right)$$

och

$$\Delta_2 = \frac{\rho_a}{\rho} \cdot 5 - \frac{\rho_a}{\rho'} \cdot 5 = 5 \cdot \left(\frac{\rho_a}{\rho} - \frac{\rho_a}{\rho'} \right)$$

Här antar vi att luftens densitet ρ_a varierar inte nämnvärt mellan vägningar.

Lösningen (3.2) skrivs om m h a ekv. (5.7) och t.ex.

$$Kc(2) = \quad (5.11)$$

$$\frac{2Kc_r(5)}{5} - \frac{2(d_3 - \Delta_3)}{5} + \frac{2(d_4 - \Delta_4)}{5} + \frac{1(d_5 - \Delta_5)}{5} - \frac{1(d_6 - \Delta_6)}{5}$$

där från ekv. (5.6)

$$\Delta_3 = \Delta_4 = 2\left(\frac{\rho_a}{\rho} - \frac{\rho_a}{\rho'}\right); \quad \Delta_5 = \Delta_6 = 1\left(\frac{\rho_a}{\rho} - \frac{\rho_a}{\rho'}\right)$$

Som numeriskt exempel antar vi att den ena (referens-) viktsatsen är tillverkad av stål, medan den andra (') är av mässing. Substitution av värdena av K och ρ_a/ρ för resp. viktsatserna från tabell 5.1 i (5.10) och (5.11) ger

$$\frac{\Delta_1}{M(5)} = \frac{\Delta_2}{M(5)} = 1 \times 10^{-5}; \quad \frac{\Delta_3}{M(2)} = \frac{\Delta_4}{M(2)} = 1 \times 10^{-5};$$

$$\frac{\Delta_5}{M(1)} = \frac{\Delta_6}{M(1)} = 1 \times 10^{-5};$$

och till en god approximation ($K = 1$)

$$c(5) = \frac{1}{2} c_r(10) - \frac{1}{2} d_1 + \frac{1}{2} d_2$$

$$c(5') = \frac{1}{2} c_r(10) - \frac{1}{2} d_1 - \frac{1}{2} d_2 + \Delta_1 \quad (5.12)$$

$$c(2) = \frac{2c_r(5)}{5} - \frac{2}{5} d_3 + \frac{2}{5} d_4 + \frac{1}{5} d_5 - \frac{1}{5} d_6$$

$$c(2') = \frac{2c_r(5)}{5} - \frac{2}{5} d_3 - \frac{3}{5} d_4 + \Delta_3 + \frac{1}{5} d_5 - \frac{1}{5} d_6$$

$$c(1) = \frac{1c_r(5)}{5} - \frac{1}{5} d_3 + \frac{1}{5} d_4 - \frac{2}{5} d_5 + \frac{2}{5} d_6$$

$$c(1') = \frac{1c_r(5)}{5} - \frac{1}{5} d_3 + \frac{1}{5} d_4 - \frac{2}{5} d_5 - \frac{3}{5} d_6 + \Delta_5$$

5.2.2 Det optimala neddelningsschemat
för viktsatsen 5(r), 2, 2', 1, 1'.

Luftupptrucks korrektionerna Δ_i erhålles från ekv. (5.6) till att vara:

$$\Delta_7 = 3\left(\frac{\rho_a}{\rho} - \frac{\rho_a}{\rho'}\right)$$

$$\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5 = \Delta_8 = 2\left(\frac{\rho_a}{\rho} - \frac{\rho_a}{\rho'}\right)$$

$$\Delta_6 = \Delta_9 = \Delta_{10} = 1\left(\frac{\rho_a}{\rho} - \frac{\rho_a}{\rho'}\right)$$

Lösningen (3.5) skrivs om mha ekv. (5.7)

$$Kc(2) = \frac{2K'c_r(5)}{5} - \frac{1d_3}{5} + \frac{1d_4}{5} + \frac{1d_5}{5} - \frac{1d_7}{5} + \frac{1d_8}{5} - \left(\frac{\rho_a}{\rho} - \frac{\rho_a}{\rho'}\right)$$

$$Kc(2') = \frac{2K'c_r(5)}{5} - \frac{1d_3}{5} - \frac{1d_4}{5} - \frac{1d_7}{5} - \frac{1d_8}{5} + \frac{1d_9}{5} + 10\left(\frac{\rho_a}{\rho} - \frac{\rho_a}{\rho'}\right)$$

(5.13)

$$Kc(1) = \frac{1K'c_r(5)}{5} - \frac{1d_3}{5} - \frac{1d_5}{5} + \frac{1d_6}{5} - \frac{1d_9}{5} + \frac{1d_{10}}{5} + \left(\frac{\rho_a}{\rho} - \frac{\rho_a}{\rho'}\right)$$

$$Kc(1') = \frac{1K'c_r(5)}{5} - \frac{1d_5}{5} - \frac{1d_6}{5} - \frac{1d_7}{5} - \frac{1d_9}{5} - \frac{1d_{10}}{5} + 6\left(\frac{\rho_a}{\rho} - \frac{\rho_a}{\rho'}\right)$$

6. AVSLUTNING

I rapporten har analyseras metoder för kilogrammets neddelningen. Instruktioner om hur man åstadkommer ett optimalt vägningsschema m a p låga osäkerheter ges. Analysen exemplifieras för viktsatsen 10, 5, 5', 2, 2', 1, 1'. En diskussion av luftuptryckets inverkan på resultatet finns exemplifierat.

REFERENSER.

1. J M Cameron, M C Croakin and R C Raybold 1977, "Designs for the calibration of standards of mass", NBS (U.S.) Technical Note 952
2. P Carré and R S Davis 1985 "Note on weighings carried out on the NBS-2 balance", J. Res. NBS (U.S.) 90, 331-9
3. G D Chapman 1987 "Calibration of kilogram submultiples", National Research Council Canada, Physics Division, Ottawa, AMS-002, NRCC 25819
- 4 M Grabe 1978 "Note on the application of the method of least squares", Metrologia 14, 143 - 6
- 5 J F Hayford 1892, "On the least square adjustment of weighings" Appendix 10, U.S. Coast and Geodetic Survey, Report 1892, Part 2, p. 515. Washington D.C., Government Printing Office.
- 6 W-J Marek 1884, Travaux et Mémoires B.I.P.M. III, p 93.
- 7 L Pendrill and H Källgren 1988 "10th comparison of Swedish national kilogram with National Testing Institute principal kilogram standards", SP Report 1988:38, Swedish National Testing Institute, Borås, Sweden.
- 8 D B Prowse and A R Andersson 1974 "Calibration of a set of masses in terms of one mass standard", Metrologia 10, 123-8
- 9 P Riety 1985 "Quelques nouveaux aspects sur l'étalonnage des boîtes de masses en série fermée", Bulletin BNM n° 60, 9 - 24
- 10 J Thomas 1989 "Subdivision of the kilogram: A working procedure for the weights and measures laboratory", SP Report 1989:16 , Swedish National Testing Institute, Borås, Sweden.
- 11 M Zuker, G Mihailov and M Romanowski 1980, "Systematic search for orthogonal systems in the calibration of submultiples and multiples of the unit of mass", Metrologia 16, 51 - 4

```

5  REM Namn: MATINV.BAS                               BILAGA 1
10 REM PROGRAM INVERTS A MATRIX
20 REM SKAPAD: 19881123  FÖRFATTARE: LESLIE PENDRILL
25 REM Ändrad: 19890309
26 OPEN "DESIGN.DAT" for input as file #1%
30 PRINT " DESIGN MATRIX DIMENSION? INPUT M(ROWS) & N(COLUMNS)"
40 INPUT M,N
50 DIM A(M,N), AT(N,M), T(N,N), D(N,N), C(N,M)
60 PRINT "INPUT DESIGN MATRIX"
70 MAT INPUT #1%, A(M,N)
80 MAT AT = TRN(A)
90 MAT T = AT*A
100 MAT D = INV(T)
110 MAT C = D*AT
130 MAT G = A*D
140 MAT PRINT A;
150 PRINT " DESIGN "
160 MAT PRINT AT;
170 PRINT " TRANSPOSE "
180 MAT PRINT T;
190 PRINT " ATA "
200 MAT PRINT D;
210 PRINT " ATA-1 "
220 MAT PRINT C;
230 PRINT " C "
260 MAT PRINT G;
270 PRINT " A*(ATA)-1 "
290 END

```

c ABA.FOR

BILAGA 2

1(4)

c Namn: Beräkning av A:B:A vägningar

c Beskrivning: Calculates

c Författare: 890221 Leslie Pendrill

c Ändrat: 890228

c*****

Program ABA

Dimension x(100),y(100),z(100),t(100)

Real p1,m1,p2,m2,m3

c*****

c Assign input data file

OPEN (Unit=10, File='PIB500.gr1', Status='Old')

c

c Number of data

N=19

c INPUT facts in weighings

c Nominal mass of weights in g

Sleft= 500

Sright1=500

c Sright2=5*1E-3

c Density of weights in kg/m³

dleft=8019.7

read(5,*) dright1

c dright1=7863.1

c dright2=2700

c Volume difference of weights in cm³

c V= (Sleft/dleft - Sright1/dright1 - Sright2/dright2)*1E6

V= (Sleft/dleft - Sright1/dright1)*1E6

c

c Input air parameter values

write(6,*) 'Input texas, temp, dew'

read(5,*) texas,temp,dew

c Calibration Systemteknik Pt 100 Givare 5 ingång A

c FEF RMP 01-G87099 1987-07-30

temp = temp - 0.004

c Dew point correction EG&G 660

c NPL 08142A/B5/2/021,1986-09-30

dew = dew + 0.2

c CO concentration

c ²

coc=.0004

c READ DATAFILE

Read(10,*)

Read(10,*)

Read(10,*)

DO 5 i=1,N

Read(10,*)

5 Continue

Read(10,*)

DO 10 i=1,N

Read(10,*) x(i)

```

10  continue
    Read(10,*)
    DO 15 i=1,N
      Read(10,*) y(i)
15  continue

```

C*****

c Calculations

c Namn: Statistical evaluation of measurement results
c Beskrivning: Calculation of mean and standard deviation of
c data from input data file (of .grl format).

C*****

c
c ABA
c

```

    M=(N-1)*0.5
    p1=0
    DO 16 i=1,M,3
      j=2*i-1
      k=2*i
      z(i) = (x(j)+x(j+2))*0.5 - y(k)
      write(6,*) i,z(i)
      p1=p1+z(i)
16  continue
    m1=p1*3/M

```

c BAB
c

```

    p2=0
    DO 17 i=2,M,3
      j=2*i+1
      k=2*i
      z(i) = x(j) - (y(k)+y(k+2))*0.5
      write(6,*) i,z(i)
      p2=p2+z(i)
17  continue
    m2=p2*3/M

```

c MEAN

m3 =(m1+m2)*0.5

c STANDARD DEVIATION

```

    i=0
    Do 30 k=1,M,3
      i=i+1
      t(i)=z(k)
30  continue

```

```

    Do 40 k=2,M,3
      i=i+1
      t(i)=z(k)
40  continue

```

P=i
dl=0

```

Do 45 k=1,P
  dl=dl+(t(k)-m3)**2
45 continue
  sl=(dl/(P-1))**(0.5)

CALL densi(texas,temp,dew,coc,dens)

```

```

c Air buoyancy
  buoy = V*dens

```

```

c RESULTS
  write(6,*) 'Air density=',dens
  write(6,*) 'Mean weight diff=',m3
  write(6,*) 'Air compensated=',m3 + buoy
  write(6,*) 'St.dev=',sl

```

```

stop
end

```

```

SUBROUTINE densi(texas,temp,dew,coc,dens)
C*****

```

```

C
c Beskrivning: Beräkning av luftens tryck och densitet
c Författare: Leslie Pendrill 870421
c Ändrat: 890203

```

```

C
C*****
  Implicit Double Precision (A-H,O-Z)

```

```

  DOUBLE PRECISION m,p,T,dewT,dew,psv,psv1,mm1,mm2,mm3,f,f1,Xv
  1 ,y1,y2,y3,Z,texas,temp,coc,dens,A,B,C,FF

```

```

C*****
c Calculation of air pressure in Pa from Texas instrument
c calibration : 1988-10-27, FFA 03-1935

```

```

  press=44359.132833467294 - .3312808694341961*texas
  1 + .0000155885173830*(texas**2) - 5.66837*1.D-11*(texas**3)

```

```

c Conversion to torr
  torr=press*.00750062
  vac=vac*(100)*.00750062

```

```

c Absolute temperatures
  dewT=dew + 273.15
  tempT=temp + 273.15

```

```

c Water vapour
  A=1.2811805*1.D-5
  B=-1.9509874*1.D-2
  C=34.04926034D0
  D=-6.353611*1.D3

```

```

c Enhancement factors
  f=1.00062 + press*(3.14*(1.D-8)) +
  1 (dew**2)*(5.6*(1.D-8))
  f1=1.00062 + press*(3.14*(1.D-8)) +
  1 (temp**2)*(5.6*(1.D-8))

```

```

c Saturated vapour pressures in Pa
  psv=DEXP(A*(dewT**2) + B*dewT + C) + D/dewT
  psv1=DEXP(A*(tempT**2) + B*tempT + C + D/tempT)

```

```

c Xv
  Xv=f*psv/press

c air mass in g.mol-1
  mm1=21.878746 + 6.700229 + .366323 + .000367 + .00017
c water vapour mass in g.mol-1
  mm2=18.015
c humidity
  humid=Xv*press/(f1*psv1)

c CO mass in g.mol-1
c 2
  mm3=44.01

c compressibility of air
  y1=1.62419*(1.D-6) - (2.8969*(1.D-8))*temp
  1 + (1.088*(1.D-10))*(temp**2)
  y2=Xv*(5.757*(1.D-6) - (2.589*(1.D-8))*temp)
  y3=(Xv**2)*(1.9297*(1.D-4) - (2.285*(1.D-6))*temp)
  Z= 1- press/tempT*(y1+y2+y3) + ((press/tempT)**2)
  1 *(1.73*(1.D-11) - (Xv**2)*1.034*(1.D-8))

c AIR DENSITY in kg.m-3

  dens=press/(Z*tempT)*(1-.378*Xv)*(3.48353
  1 + 1.44*(coc-.0004))*(1.D-3)

  return
  end

```

c Namn: OPTIMAL.FOR

BILAGA 3

c Beskrivning: Calculates optimal solution of kilogram submultiples

c Författare: 890227 Leslie Pendrill

c Ändrat: 890228

c*****

Program OPTIMAL

c Input data (μg) (should be air buoyancy compensated)

c Reference weight Skiv 100g correction

cr = + 1554.26

scr = 1.62

c Input Deflections (μg)

write(6,*) 'd1 (μg) & s.d'

read(5,*) d1,s1

write(6,*) 'd2 (μg) & s.d'

read(5,*) d2,s2

write(6,*) 'd3 (μg) & s.d'

read(5,*) d3,s3

write(6,*) 'd4 (μg) & s.d'

read(5,*) d4,s4

write(6,*) 'd5 (μg) & s.d'

read(5,*) d5,s5

write(6,*) 'd6 (μg) & s.d'

read(5,*) d6,s6

write(6,*) 'd7 (μg) & s.d'

read(5,*) d7,s7

write(6,*) 'd8 (μg) & s.d'

read(5,*) d8,s8

write(6,*) 'd9 (μg) & s.d'

read(5,*) d9,s9

write(6,*) 'd10 (μg) & s.d'

read(5,*) d10,s10

c Solution

$$c5 = 0.5*(cr - d1 + d2)$$

$$c5a = 0.5*(cr - d1 - d2)$$

c standard deviations in solution

$$sv5 = \text{sqrt}(0.25*(scr**2 + s1**2 + s2**2))$$

$$sv5a = \text{sqrt}(0.25*(scr**2 + s1**2 + s2**2))$$

c Thomas lösning

$$ct2 = 0.2*(2*c5 - 2*d3 + 2*d4 + d5 - d6)$$

$$ct2a = 0.2*(2*c5 - 2*d3 - 3*d4 + d5 - d6)$$

$$ctl = 0.2*(c5 - d3 + d4 - 2*d5 + 2*d6)$$

$$ct1a = 0.2*(c5 - d3 + d4 - 2*d5 - 3*d6)$$

c standard deviations in Thomas' lösning (approx.)

$$svt2 = \text{sqrt}(0.04*(4*(sv5**2) + 4*(s3**2) + 4*(s4**2) + s5**2 + s6**2))$$

$$svt2a = \text{sqrt}(0.04*(4*(sv5**2) + 4*(s3**2) + 9*(s4**2) + s5**2 + s6**2))$$

$$svt1 = \text{sqrt}(0.04*(sv5**2 + s3**2 + s4**2 + 4*(s5**2) + 4*(s6**2)))$$

$$svt1a = \text{sqrt}(0.04*(sv5**2 + s3**2 + s4**2 + 4*(s5**2) + 9*(s6**2)))$$

c Optimal solution

$$c2 = 0.2*(2*c5 - d3 + d4 + d5 - d7 + d8)$$

$$c2a = 0.2*(2*c5 - d3 - d4 - d7 - d8 + d9)$$

$$c1 = 0.2*(c5 - d3 - d5 + d6 - d9 + d10)$$

$$c1a = 0.2*(c5 - d5 - d6 - d7 - d9 - d10)$$

c Standard deviations in optimal solution

$$sv2 = \text{sqrt}(0.04*(4*(sv5**2) + s3**2 + s4**2 + s5**2 + s7**2 + s8**2))$$

$$sv2a = \text{sqrt}(0.04*(4*(sv5**2) + s3**2 + s4**2 + s7**2 + s8**2 + s9**2))$$

$$sv1 = \text{sqrt}(0.04*(sv5**2 + s3**2 + s5**2 + s6**2 + s9**2 + s10**2))$$

$$sv1a = \text{sqrt}(0.04*(sv5**2 + s5**2 + s6**2 + s7**2 + s9**2 + s10**2))$$

c Write results

```
write(6,*) ' Optimal solution ( $\mu$ g) ( standard deviation )'
```

```
write(6,*) c5, '(,sv5,)'
```

```
write(6,*) c5a, '(,sv5a,)'
```

```
write(6,*) c2, '(,sv2,)'
```

```
write(6,*) c2a, '(,sv2a,)'
```

```
write(6,*) c1, '(,sv1,)'
```

```
write(6,*) c1a, '(,sv1a,)'
```

```
write(6,*) 'Thomas lösning'
```

```
write(6,*) ct2,ct2a,ctl,ct1a
```

```
write(6,*) svt2,svt2a,svt1,svt1a
```

```
stop
```

```
end
```

STATENS PROVNINGSANSTALT
Mätt och Vikt
Box 857, 501 15 BORAS
Telefon 033-16 50 00

SP RAPPORT
1989:22
ISBN 91-7848-172-4
ISSN 0284-5172