

SVENSKA INSTITUTET FÖR KONSERVERINGSFORSKNING, GÖTEBORG

SIK - Rapport

---

1961

Nr 98a

REOLOGINS ELEMENTA

av

Birger Drake

I huvudsak identisk med särtryck ur:

"Svenska nationalkommittén för mekanik, reologisektionen.

Meddelande (1961): 1", p. 15-22.

---

(Bearbetning av föredrag hållet vid konferens, som anordnades  
vid SIK av ovannämnda organisation den 6 december 1960.)

1752/61 Krn

(Ny dragning 1967 efter smärre korrigeringar.)

## REOLOGINS ELEMENTA

Birger Drake

Svenska Institutet för Konserveringsforskning

En fysikalisk kropp kan samtidigt röra sig på olika sätt: den kan förflyttas, rotera, ändra volym och ändra form. För reologin är dock endast de två sistnämnda rörelsesätten av intresse. I praktiken är det omöjligt att helt isolera ett visst reologiskt förlopp, men försöksbetingelserna kan ofta modifieras så, att endast en rörelseform dominerar.

Den deformationstyp som vanligen förbindes med begreppet reologi är skjuvning /"shear"/. Denna kan i sin grundform illustreras med ett enkelt diagram (Fig. 1), som visar relationen mellan olika storheter. Gentemot denna grundform, som även brukar kallas enkel skjuvning ("simple shear"), kan man ställa en annan, s.k. ren skjuvning ("pure shear"), som icke inbegriper någon rotationsrörelse, och som erhålles t.ex. då en stav utdrages i längdriktningen (Fig. 2). I regel har man att göra med tre storheter: deformationsgrad /"strain"/, deformationskraft /"stress"/ och tid. De två första variablerna betecknas vanligen  $\gamma$  (skjuvningsgrad) eller  $\epsilon$  (töjningsgrad) resp.  $\tau$  (skjuvspänning) eller  $\sigma$  (dragspänning). Vid de enklaste rörelsetyperna kan man uppställa enkla relationer mellan dessa storheter, medan det vid mera komplicerade rörelser kan vara mycket svårt eller omöjligt att ge en matematisk beskrivning av tillstånd och förlopp.

Vid idealt elastisk deformation är skjuvningsgraden direkt proportionell mot skjuvspänningen men oberoende av tiden, medan det vid idealt viskös deformation är skjuvningshastigheten  $\dot{\gamma} = d\gamma/dt$  som är direkt proportionell mot skjuvspänningen.

### Reologiska typer: Fasta kroppar

Fasta kroppar kan töjas och skjuvas, varvid det i de enkla fallen mot varje värde på  $\sigma$  resp.  $\tau$  svarar ett visst värde på  $\epsilon$  resp.  $\gamma$ .

Principen att töjningen är proportionell mot den verkande kraften, formulerad på 1600-talet av Hooke, tillämpas vid bestämning av elasticitetsmodul  $E$  (= Young's modul), d.v.s. kvoten mellan dragspänning och relativ längdökning (jfr Fig. 2). Elasticitetsmodulen kan för olika material antaga mycket olika värden, från t.ex. 20 för stål till t.ex. 0,0002 för gelatiningel.

Ett annat sätt att mäta skjuvning ger (jfr Fig. 1) en relation mellan skjuvspänning och skjuvningsgrad:  $G = \tau / \gamma$ , där  $G$ , som i likhet med  $E$  är en materialkonstant, kallas skjuvmodul, "rigidity modulus" m.m.

### Reologiska typer: Vätskor

Vätskor kan flyta, varvid de rörelser som utföres är begränsade av att vätskemassans totala volym är (praktiskt taget) konstant, medan rörelsehastigheten beror av vätskans viskositet (inre friktion).

För vätskor talar man ibland om skjuvningshastighet /"rate of shear"/ och ibland om hastighetsgradient /"velocity gradient"/. Dessa två ord betyder emellertid samma sak, vilket framgår av den matematiska härledningen.

Den s.k. viskositetskoefficienten  $\eta = \tau/\dot{\gamma}$  anges ofta i måttenheten centipoise (cP), vilket har sin grund däri att vattnets viskositetskoefficient vid 20°C råkar vara nästan exakt 1 cP. Gaser har vanligen 30-100 gånger lägre viskositet än vatten, medan man hos glas vid 20°C har uppmätt  $10^{22}$  cP (mot  $10^{13}$  cP vid 575°C).

Viskositetskoefficienten  $\eta$  är ett mått på graden av tjockflytande, och dess inverterade värde, fluiditetskoefficienten  $\phi$ , på graden av tunnflytande. Dessa koefficienter ändrar sig något med trycket och avsevärt med temperaturen.

För ämnen med små molekyler är  $\eta_{sp} = (\eta - \eta_0)/\eta_0^1$  proportionell mot koncentrationen inom ett relativt stort koncentrationsområde, medan man för t.ex. högpolymerlösningar måste räkna med mera komplicerade formler för att få ett för varje ämne karakteristiskt värde.

Vid sidan av  $\eta$  för "dynamisk" viskositet förekommer även  $\nu$  för "kinematisk" viskositet. Skillnaden mellan dessa är att  $\nu$  erhålles genom att dividera  $\eta$  med vätskans täthet. I regel räknar man inom reologin med  $\eta$ , men det är i vissa formler fördelaktigt att i stället införa  $\nu$ . Så t.ex. är uttrinngstiden för en pipett (där vätskans egen tyngd utgör den drivande kraften) direkt proportionell mot den kinematiska viskositeten.

### Reologiska typer: Mellanformer mellan fasta kroppar och vätskor

Många material kan uppfattas som ett mellanting mellan typiska fasta kroppar och typiska vätskor. Ofta visar sig detta därigenom att sådana material vid mindre påkänningar uppträder som elastiska kroppar, som töjes utan att börja flyta, medan de vid kraftigare påkänning uppför sig som relativt trögflytande vätskor. Om man för ett sådant material uppsätter skjuvningshastighet som funktion av skjuvspänningen, erhålles en s.k. flytkurva av den typ som visas i Fig. 3A. Sträckan OA,

<sup>1)</sup>  $\eta_0$  = lösningsmedlets viskositetskoefficient

som representerar den kraft som kräves för att materialet skall börja flyta, brukar kallas flytgräns /"yield value"/ och betecknas  $\tau_0$  eller  $\sigma$ .

För en newtonsk vätska (d.v.s. en som ansluter sig exakt till Newton's ansats)<sup>1</sup> är skjuvningshastigheten proportionell mot skjuvspänningen, varför flytkurvan i ett sådant fall reduceras till en rät linje genom origo (jfr Fig. 3A, vänstra kurvan). Enligt vad som direkt framgår av Fig. 3A är  $\eta$  en konstant för de newtonska vätskorna men icke för övriga flytbara material. Man talar därför ibland om "kvasiviskositet" och kallar då  $\eta$  "skenbar viskositetskoefficient". Ett annat mått på viskositet är den "plastiska viskositetskoefficienten", vilken definieras som  $\eta_{pl} = \Delta\tau/\Delta\dot{\gamma}$ , d.v.s. lutningen av kurvan i en viss punkt (jfr Fig. 3B, tangenten till den plastiska kurvan).

Man skiljer mellan olika reologiska typer, av vilka i Fig. 3B åskådliggöres pseudoplastiska ("strukturviskösa"), plastiska ("formbara") och dilatanta. Vid strömning genom rör ger de strukturviskösa vätskorna en genomströmningshastighet, som ej är proportionell mot det pålagda trycket, utan som ökar snabbare än detta. De plastiska materialen kan under liknande omständigheter (vid låga strömningshastigheter) utmed rörets axel ge en plugg, som passivt följer med den omgivande strömmande delen av samma material. De dilatanta materialen kan vid långsam rörning med t.ex. en glasstav verka lagom tjockflytande, medan de vid snabbare rörning kan stelna till så kraftigt att glasstaven brytes av.

Ett par deformationstyper, vilka båda hör till gruppen hysteresfenomen, är de som brukar kallas tixotropi och reopexi. I första fallet rör det sig om en skjuvningsframkallad sänkning av viskositetskoefficienten, d.v.s. en förtunning, som kan iakttagas, då materialet röres, men som går tillbaka, då materialet är i vila. Ett välkänt exempel härpå utgör de nu moderna geléfärgerna. I det andra fallet rör det sig om motsatsen, d.v.s. en förtjockning under liknande förhållanden. Ett (ofullkomligt) mått på dessa egenskaper, som schematiskt illustrerats i Fig. 4, erhålles genom mätning av ytan inom en slinga.

Ett annat intressant (och hittills teoretiskt outrett) fenomen är den s.k. Weissenberg-effekten, som visar sig t.ex. däri att vissa material vid rotering av en delvis nedstucken glasstav tycks krypa upp på staven i stället för att såsom t.ex. vanligt vatten slungas utåt av centrifugalkraften. Ytterligare ett fenomen, som förekommer vid strömning av suspensioner i smala rör, är den s.k. sigma-effekten, som visar sig därigenom att rör med olika diameter ger olika värden på  $\eta$ . Den

---

1) jfr Fig. 1.

synes bero på att den vanliga härledningen av strömningsformeln (ekv. 1, sid. 19) inte gäller, då de suspenderade partiklarna är relativt stora i förhållande till rörets inre dimensioner.

Bland materialegenskaper, vilka inte bekvämt kan representeras av en enkel kurva i ett  $\gamma/\tau$ - eller  $\dot{\gamma}/\tau$ -diagram, kan nämnas hållfasthet, hårdbarhet, klibbighet, adhesivitet och spinnbarhet. I regel rör det sig här om en särskild kombination av flera egenskaper, vilka tillsammans bildar en ny enhet, i vilken det ofta är svårt att urskilja de olika delarna.

#### Reologisk teori: Fasta kroppar

Det fundamentala i elasticitetsteorin är att skjuvningsgraden  $\gamma$  antages vara proportionell mot skjuvspänningen, eller något mera strikt formulerat: var och en av de sex komponenterna av  $\gamma$  är en linjär funktion av de sex komponenterna av  $\tau$ . Detta ger i det allmänna fallet 6 ekvationer med sammanlagt 36 koefficienter (materialkonstanter). Hos isotropa material är dock alla dessa ej oberoende av varandra, utan man har där att göra med endast två, ur vilka de övriga kan beräknas. Ofta väljer man som fundamentala: elasticitetsmodul E och Poisson's tal  $\mu$ . Den senare av dessa anger hur mycket en stav smalnar, då den drages ut, t.ex. vid bestämning av E enligt Fig. 2. För anisotropa material gäller däremot ofta mycket komplicerade relationer mellan skjuvningsvariablerna. För t.ex. trä finnes 3 olika E-värden och tre olika  $\mu$ -värden.

Materialkonstanten G, som är direkt relaterad till den enkla skjuvningsgraden, har till E och  $\mu$  relationen  $G = E/2(1 + \mu)$ . För icke kompressibla material (för vilka  $\mu = 0,5$ ) erhålles i stället  $G = E/3$ . En annan materialkonstant, kompressibiliteten  $\kappa$ , anger hur mycket ett materials volym minskar vid påläggande av ett visst hydrostatiskt tryck.

#### Reologisk teori: Vätskor

För utspädda suspensioner av sfäriska fasta partiklar gäller teoretiskt:  $\eta = \eta_0 (1 + 2,5 c_v)$ , d.v.s.  $\eta_{sp} = 2,5 c_v$ , där  $c_v$  = volymbråket av suspenderad substans.

En annan formel, som gäller förflyttning av en sfärisk partikel i en vätska, är den s.k. Stoke's lag:  $f = 6\pi r\eta v$ , där  $f$  = den kraft som verkar på sfären,  $r$  = sfärens radie och  $v$  = sfärens rörelsehastighet i vätskan.

För strömning i ett rör med cirkulärt tvärsnitt gäller den bekanta Hagen-Poiseuille's formel:

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 \eta L}, \quad (1)$$

där  $Q$  = total strömningshastighet,  $R$  = rörets inre radie,  $\Delta p$  = tryckskillnaden mellan rörets ändar och  $L$  = rörets längd.

För rotation mellan cylinderytor gäller Margule's ekvation:

$$M = 4 \dot{\omega} \pi \eta h (R_y^2 - R_i^2) / R_y^2 \cdot R_i^2 \quad (2)$$

där  $M$  = det vridande moment som verkar på vardera cylindern,  $\dot{\omega}$  = rotationshastigheten,  $h$  = inre cylinderns höjd,  $R_i$  = inre cylinderns radie samt  $R_y$  = yttre cylinderns radie. I detta fall varierar  $\dot{\gamma}$  inom ett betydligt mindre område än vid strömning i rör.

### Reologisk teori: Övriga material

Man har vidare utvecklat en speciell plasticitetsteori, som behandlar övergången från elastisk skjuvning till flytning (och vice versa). I de tre analytiskt viktiga fallen strömning i rör, rotering mellan cylindrar och pressning mellan plattor har man kunnat beräkna läget för de punkter där en sådan övergång sker i ett skjuvat material.

För teoretisk behandling av komplicerade materialtyper går man dock ofta en annan väg, nämligen på så sätt att man tänker sig ett slags modeller, bestående av enkla element. Dessa, som utgöres av en ideal spiralfjäder, en ideal vätskebroms samt en ideal friktionskropp, kan sammansättas på olika sätt, av vilka två viktiga typer illustreras i Fig. 5. Såsom framgår av den nedre hälften av denna figur, uppträder en Maxwell-kropp och en Kelvin-kropp helt olika, då de under en viss tid (AB i Fig. 5) utsättes för en konstant dragkraft: Maxwell-kroppen tänjes momentant, för att därefter flyta med konstant hastighet - Kelvin-kroppen flyter med en hastighet, som från ett visst begynnelsevärde sjunker exponentiellt mot noll. Då denna flytning sker med låg hastighet under lång tid, talar man om krypning /"creep"/. Vid borttagande av den verkande kraften återgår de båda kropparna på var sitt sätt till ett viloläge, som i första fallet ej är identiskt med utgångsläget. Man säger, att Maxwell-kroppen är en "elastisk vätska", och att Kelvin-kroppen är en "viskös fast kropp". Materialegenskaperna kallas analogt elastoviskositet och viskoelasticitet (= firmoviskositet).

Modellornas uppträdande kan uttryckas i enkla matematiska ekvationer, av vilka några återges här:

$$\begin{array}{ll}
\text{Hooke:} & \tau = G \cdot \gamma \\
\text{Newton:} & \tau = \eta \cdot \dot{\gamma} \\
\text{Maxwell:} & \tau = \eta \cdot \dot{\gamma} - \eta \cdot \dot{\tau} / G_1 \\
\text{Kelvin:} & \tau = G \cdot \gamma + \eta_s \cdot \dot{\gamma} \\
\text{Bingham:} & \tau = \tau_0 + \eta_{pl} \cdot \dot{\gamma} \quad (\tau > \tau_0)
\end{array} \tag{3}$$

Index 1 användes på G i den tredje formeln för att beteckna "liquid rigidity", och index s på  $\eta$  i den fjärde formeln för att beteckna "solid viscosity".

Ur differentialekvationerna för Maxwell-kroppar och Kelvin-kroppar kan för vissa specialfall exponentiellt avklingande funktioner härledas. I Maxwell-fallet rör det sig om en dragkraft, som minskar från ett visst värde för att efter oändligt lång tid försvinna ("stress relaxation"), medan det i andra fallet rör sig om en skjuvning, som hela tiden ökar för att efter oändligt lång tid uppnå ett visst slutvärde ("elastic after-effect"). Storheterna  $\eta/G_1$  och  $\eta_s/G$ , vilka båda har dimensionen tid, brukar kallas relaxationstid resp. retardationstid.

Gentemot det härovan beskrivna analytiska betraktelsesättet står det s.k. integrativa, vilket icke delar upp förloppen i element utan i stället söker att sammanfatta alla reologiska typer i en och samma formel. Det bäst kända exemplet på en sådan formel är den som uppställts av Scott Blair på grundval av enklare formler, vilka först angivits av

$$\text{Nutting:} \quad \gamma \cdot \psi = \tau^\beta \cdot t^k \tag{4}$$

där  $\psi$  är en sorts generaliserad viskositetskoefficient,  $t$  = tid samt  $\beta$  och  $k$  = två materialkonstanter.

Specialfallen Hooke-kropp och newtonsk vätska erhålles direkt genom att sätta  $\beta = 1$ ,  $k = 0$  resp.  $\beta = 1$ ,  $k = 1$ . Om däremot  $k$  sättes = ett tal mellan 0 och 1, erhålles en formel, som visat sig stämma väl för vissa material, t.ex. engelsk cheddarost ( $k = 0,2$ ). För andra material får man i stället använda bråktalsvärden för  $\beta$ .

Fördelarna med ett uttryck av denna typ är att åtskilliga materials egenskaper kan komprimeras i endast 2 konstanter, medan den analytiska metoden för de flesta material kräver 3 eller flera element för att bygga upp en lämplig modell. Å andra sidan ger ett sådant uttryck intog någon ledtråd för den som vill analysera ett materials uppträdande vid olika mekaniska bearbetningsätt.

Reologisk teori: Fysikalisk kemi

Grundläggande inom fysikalisk kemisk reologiteori är antagandet att det i fasta och flytande strukturer finns oregelbundenheter: hål, dislokationer, etc. En deformation tänker man sig sålunda alltid åstadkommen genom att en partikel flyttas till ett intilliggande hål, varefter nästa partikel kan flytta sig till det nya hål, som därvid uppstår, o.s.v. Utgående från denna uppfattning har Frenkel och Eyring m.fl. utvecklat en teori, vars slutresultat efter åtskilliga förenklingar utmynnar i bl.a. den redan tidigare uppställda empiriska formeln för viskositetens temperaturberoende:

$$\eta = A \cdot e^{B/RT}, \quad (5)$$

där B har dimensionen "energi".

Att denna formel påminner mycket om Arrhenius' uttryck för kemisk reaktionshastighet är mera än en tillfällighet. Platsväxlingsförloppet vid viskös strömning kan nämligen uppfattas som analogt till en kemisk reaktion.

Hithörande frågor hänföres ofta till en särskild del av reologin: mikroreologin.

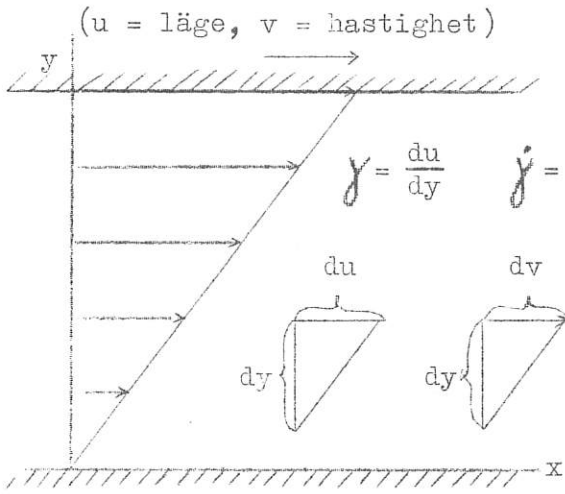


Fig. 1. Skjuvning

$$E = \sigma / (\Delta L / L) = \sigma / \epsilon$$

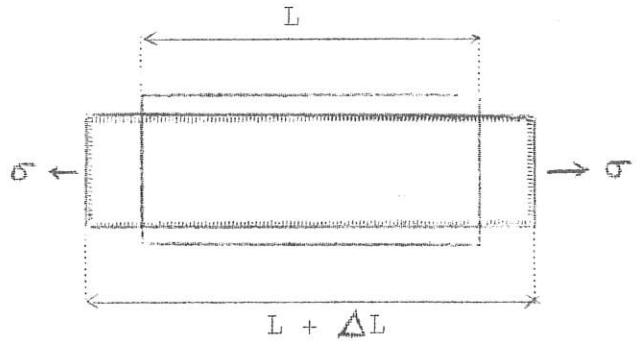


Fig. 2. Töjning

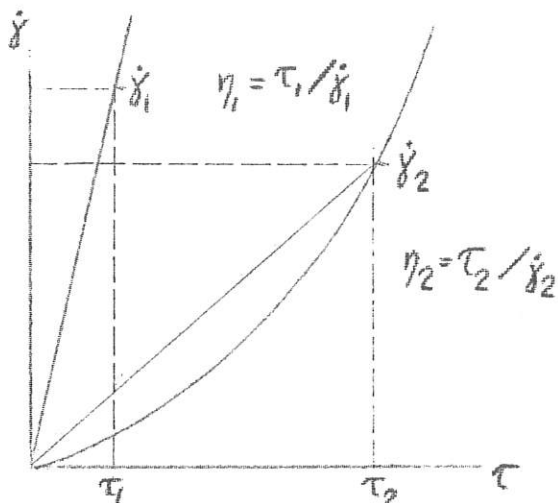


Fig. 3A. Två olika flytkurvor

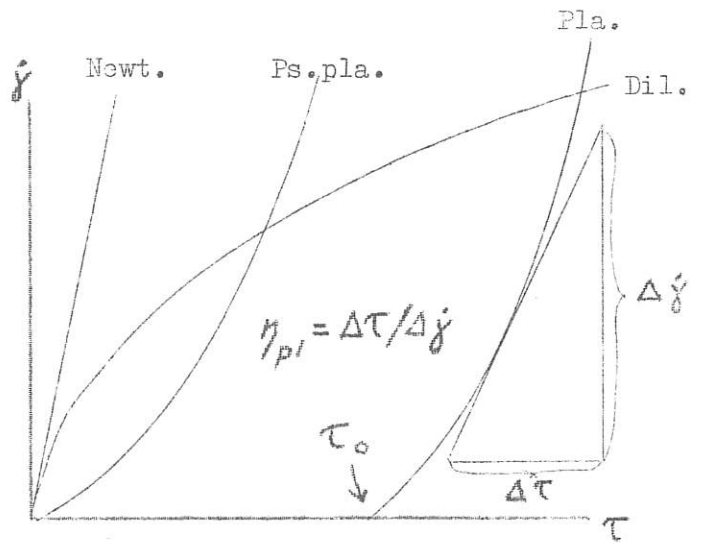


Fig. 3B. Vissa reologiska typer

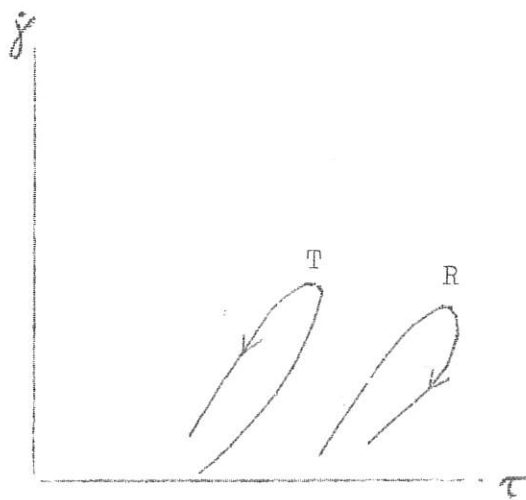
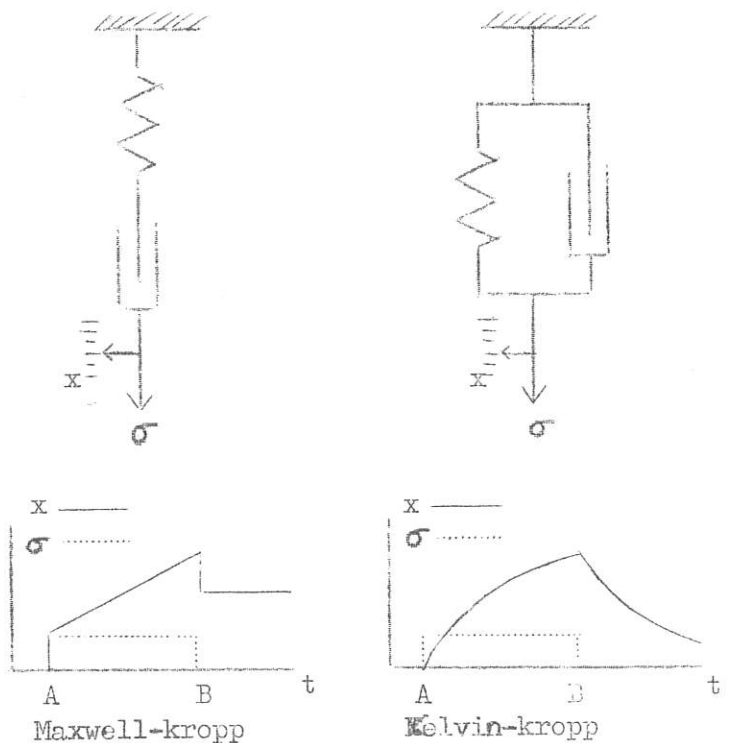


Fig. 4. Tixotropi och reopexi



Maxwell-kropp Kelvin-kropp

Fig. 5. Reologiska modeller